

# Programme de colle n°3

semaine du 28 au 2 octobre

---

## Notions vues en cours

---

### Chapitre 4 – Trigonométrie

- Pour les fonctions  $\cos$ ,  $\sin$  et  $\tan$  : valeurs particulières, formules d'addition, de duplication.
- Formules de changement de quadrans pour cosinus et sinus, par exemple  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ , ou  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- Formules de linéarisation  $\cos a \cos b$ ,  $\sin a \sin b$ ,  $\sin a \cos b$
- Ensemble  $a + b\mathbb{Z}$ , congruences dans les réels :  $x \equiv a \pmod{b}$  équivaut à dire que  $x \in a + b\mathbb{Z}$ . Symétrie et transitivité de la congruence. Règles d'addition et de multiplication par une constante non nulle dans une congruence.
- Union d'une famille  $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ , notée  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ .
- Caractérisations de  $\cos a = \cos b$ ,  $\sin a = \sin b$  et de  $\tan a = \tan b$ , résolution d'(in)équations trigonométriques. **On devra donner explicitement l'ensemble des solutions  $S$  de toute (in)équation trigonométrique** : par exemple pour une inéquation l'ensemble est typiquement de la forme  $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a_k, b_k]$ .
- Formules de l'angle moitié, cotangente
- Résolution d'équations du type  $a \cos x + b \sin x = c$  en réécrivant  $a \cos x + b \sin x$  en  $A \cos(x - \varphi)$  pour des réels  $a$  et  $b$  qui le permettent.

### Chapitre 5 – Nombres complexes

- Généralités : nombre  $i$ , ensembles  $\mathbb{C}$  et  $i\mathbb{R}$ , **forme algébrique**, partie réelle, partie imaginaire, identification des parties réelles et des parties imaginaires, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
- Opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$  dans  $\mathbb{C}$ , généralisation des formules  $\sum_{k=0}^n x^k$ ,  $a^n - b^n$  et du binôme aux complexes
- **Conjugué** d'un complexe : définitions, propriétés élémentaires, interprétation géométrique
- **Module** : définitions, propriétés élémentaires, interprétation géométrique
- Identité remarquable  $|u + v|^2$ , première inégalité triangulaire, seconde inégalité triangulaire.
- Cas d'égalité : on a  $|u + v| = |u| + |v|$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont positivement liés, i.e. si  $u$  est nul, ou  $v$  est nul ou si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad u = \lambda v$
- Différentes caractérisations de  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}_+$ ,  $z \in \mathbb{R}_-$ ,  $z \in i\mathbb{R}$  en termes de partie réelle, partie imaginaire, conjugué et de module
- **Exponentielle complexe**  $e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , propriétés :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ , conjugué et inverse de  $e^{i\theta}$ , formule de Moivre,  $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$  si et seulement si  $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$
- Cercle unité  $\mathbb{U}$  : ensemble des complexes de module 1, tout complexe  $z \in \mathbb{U}$  peut s'écrire sous  $e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , et même  $\theta \in [0, 2\pi[$  ou encore  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .
- **Forme exponentielle** (ou trigonométrique)  $z = re^{i\theta}$  pour un complexe  $z$  non nul, propriété  $r = |z|$ , caractérisation de  $re^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$ , passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement, forme exponentielle de  $zz'$ , de  $\frac{z}{z'}$  et de  $z^n$  en fonction de celles de  $z$  et  $z'$

- Argument d'un complexe non nul : définition, propriétés, interprétation géométrique, l'unique argument qui est dans  $] -\pi, \pi]$  est appelé argument principal
- Formules d'Euler, linéarisation de  $\cos^n \theta$  ou de  $\sin^n \theta$ , applications pour des calculs simplifiés d'intégrale ou de dérivée
- Opération inverse de la linéarisation : transformation de  $\cos(n\theta)$  ou de  $\sin(n\theta)$  en polynôme de  $\cos \theta$  et/ou  $\sin \theta$
- Méthode : angle moitié pour factoriser  $e^{ia} \pm e^{ib}$ , identités trigonométriques de  $\cos a \pm \cos b$  et  $\sin a \pm \sin b$

**Les questions de cours sont en page suivante**

**Questions Flash.** Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres 2 à 4).

**Les questions flash sont en page suivante**

**Questions de Cours.**

[Exporter  
\(LaTeX\)](#)

**Q1 Sans démonstration :**

- Pour les fonctions  $\cos$ ,  $\sin$  et  $\tan$ , donner les formules d'addition, de duplication.  
Chapitre 4, Théorèmes 4.5, 4.6 et 4.17 (et la remarque en-dessous)
- Donner les formules de  $\cos a \cos b$ ,  $\sin a \sin b$ ,  $\sin a \cos b$ .  
Chapitre 4, Théorème 4.7
- Deux formules parmi  $\cos(\pi \pm x)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$ ,  $\sin(\pi \pm x)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$  choisies par l'examineur  
Chapitre 4, Théorème 4.4
- Donner trois valeurs particulières choisies par l'examineur, par exemple  $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$  ou  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

[Exporter  
\(LaTeX\)](#)

**Q2**

- Énoncer et démontrer l'identité remarquable et la première inégalité triangulaire.  
Chapitre 5, Théorème 5.15
- Énoncer sans démonstration le cas d'égalité de la première inégalité.  
*Note qui ne sera pas sur le sujet : si vous utilisez le terme "positivement liés", il faudra en donner la définition.*  
Chapitre 5, Définition 5.16, Théorème 5.17

[Exporter  
\(LaTeX\)](#)

**Q3** TD 5, Exercice 17 (tronqué) :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer :

$$C_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$$

#### Chapitre 4 :

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une ou deux formules à compléter parmi les formules de changement de quadran, d'addition, de duplication, au choix de l'examineur.
- Compléter :  $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter :  $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter :  $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

#### Chapitre 3 :

- Compléter les formules  $\sum_{k=1}^n k = \dots$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule  $a^n - b^n = \dots$
- Factoriser  $a^n - b^n$  pour une petite valeur de  $n$ , fixée par l'examineur.
- Compléter la formule  $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Recopier et compléter les formules correctes, et seulement celles-là :

$$\sum (a_i + b_i) = \dots \quad \sum a_i b_i = \dots \quad \sum \lambda a_i = \dots \quad \sum a_i^\lambda = \dots$$

$$\prod (a_i + b_i) = \dots \quad \prod a_i b_i = \dots \quad \prod \lambda a_i = \dots \quad \prod a_i^\lambda = \dots$$

(on s'autorise ici à ne rien mettre au-dessus et en-dessous des symboles  $\sum$  et  $\prod$ )

- Réaliser un changement d'indice donné dans une somme donnée par l'examineur. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{k}{n+k} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots \quad \text{avec } j = k + n$$

- Donner la définition de  $\binom{n}{k}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule  $(a+b)^n = \dots$
- Développer  $(a+b)^n$  pour une petite valeur de  $n$ , fixée par l'examineur.
- Compléter :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$
- Compléter :  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

#### Chapitre 2 :

- Compléter :  $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots \quad \text{et} \quad \forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots$
- Sous quelle condition sur les réels  $a$  et  $b$  peut-on écrire " $a = b \iff a^2 = b^2$ " ?
- À quelle condition peut-on appliquer une fonction  $f$  des deux côtés d'une inégalité  $a \leq b$  et quelle inégalité obtient-on ?
- Dessiner le graphe de la fonction partie entière.

- Soit  $x$  et  $y$  deux réels et  $k$  un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x + y \rfloor = \dots \quad \lfloor x + k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Étant donné deux réels quelconques, comment définit-on la distance qui les sépare ?

## Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

[Retour en  
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\textbf{Sans démonstration :}
\begin{itemize}
\item Pour les fonctions cos, sin et tan, donner les formules d'addition, de
    duplication.
\item Donner les formules de  $\cos a \cos b$ ,  $\sin a \sin b$ ,  $\sin a \cos b$ .
\item Deux formules parmi  $\cos(\pi \pm x)$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2} \pm x)$ ,  $\sin(\pi \pm x)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2} \pm x)$ 
    choisies par l'examineur
\item Donner trois valeurs particulières choisies par l'examineur, par exemple
     $\tan(\frac{\pi}{6})$  ou  $\cos(\frac{2\pi}{3})$ .
\end{itemize}
```

[Retour en  
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Énoncer et démontrer l'identité remarquable et la première inégalité triangulaire.
\item Énoncer sans démonstration le cas d'égalité de la première inégalité.

\end{itemize}
```

[Retour en  
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer :  $C_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$